

Compito di MD
A.A. 2014/15 - 2 luglio 2015

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1.

Sia $a \in \mathbb{Z}$. Consideriamo il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{76} \\ x \equiv a \pmod{8} \end{cases}$$

- i) Per quali valori di a il sistema ha soluzione?
- ii) Determinare le soluzioni del sistema per $a = 111$.

a) Risolvo la prima equazione

$$3x \equiv 5 \pmod{76} \Leftrightarrow (-25)3 \equiv 5(-25) \pmod{76}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 27 \pmod{76}$$

-25 è l'inverso di 3 mod 76.
Posso moltiplicare perché $(-25, 76) = 1$.

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x \equiv 27 \pmod{76} \\ x \equiv a \pmod{8} \end{cases} \text{ e sappiamo}$$

che ha soluzione \Leftrightarrow

$$a \equiv 27 \equiv -1 \pmod{4}$$

$$(76, 8) = 4 \mid 27 - a \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a \equiv -1 \pmod{4}}$$

ggg)

$$a = 111$$

$$\begin{cases} x \equiv 27 \pmod{76} \\ x \equiv 111 \equiv -1 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 27 + 76k \\ 27 + 76k \equiv -1 \pmod{8} \end{cases}$$

$$4k \equiv -28 \pmod{8}$$

$$k \equiv -7 \pmod{2}$$

$$k \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 27 + 76(1 + 2n) = 27 + 76 + 152n$$

$$\boxed{x \equiv 103 \pmod{152}}$$

Cognome e nome:

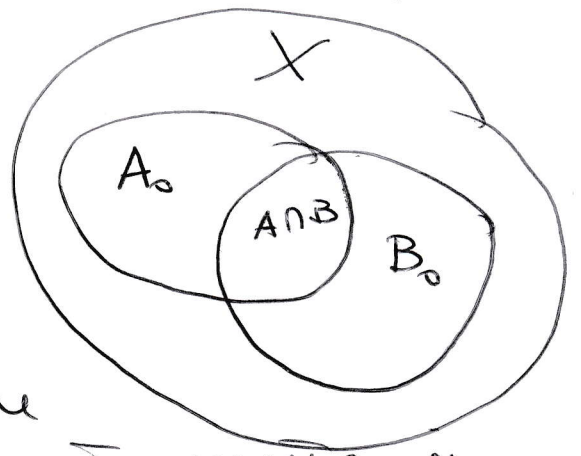
Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 2.

Sia $N_{50} = \{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$.

- a) Contare le coppie (A, B) di sottoinsiemi di N_{50} tali che $A \cap B = \emptyset$.
- b) Contare le coppie (A, B) di sottoinsiemi di N_{50} tali che $A \cap B$ contiene solo multipli di 5.
- c) Contare le coppie (A, B) di sottoinsiemi di N_{50} tali che $A \cap B$ coincide con l'insieme dei multipli di 5 che appartengono ad A o a B .

Per risolvere l'esercizio possiamo considerare il seguente modello: Abbiamo 4 scatole ~~per~~ una corrispondente a $A \cap B$ una a $A_0 = A - A \cap B$, una a $B_0 = B - A \cap B$ e una $X = (A \cup B)^c$ e vogliamo distribuire in queste 50 palline numerate da 1 a 50 seguendo le regole descritte nei vari punti. I modi di distribuire le palline ~~contano~~ i compatibilmente con le richieste, contano le coppie di sottoinsiemi che verificano le condizioni imposte.



- 2) La scatola $A \cap B$ deve rimanere vuota, sulle altre non ho richieste \Rightarrow ognuna delle 50 palline può essere messa indifferentemente in A_0, B_0 o X , per ognuna ho quindi 3 scelte \Rightarrow 3^{50} coppie (A, B) con $A \cap B = \emptyset$

b) In questo caso i multipli di 5 possono (che sono 10) possono essere membri in genere delle 4 scade $\rightarrow 4^{10} = 2^{20}$ possibilità

I non multipli di 5 (che sono 4) non possono andare in $A \cap B \Rightarrow 3^{40}$ possibilità

\Rightarrow In Totale $\boxed{4^{10} \cdot 3^{40} = 2^{20} \cdot 3^{40}}$ possibili coppie (A, B)

c) La richiesta corrisponde a due che i multipli di 5 possono essere membri solo in $A \cap B$ e in $X \Rightarrow 2^{10}$ possibilità

I non multipli di 5 possono essere membri solo in $A_0, B_0, X \Rightarrow 3^{40}$ possibilità

\Rightarrow in Totale $\boxed{2^{10} \cdot 3^{40}}$

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 3.

Sia $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ A è diagonalizzabile sul campo \mathbb{R} .

$$P_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & a^2 + 1 & -x \end{pmatrix} = -x \det \begin{pmatrix} -x & a^2 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & a^2 + 1 & -x \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & a^2 + 1 & x \end{pmatrix} =$$

$$= -x(-x^3 - (-x)(a^2 + 1)) - (-a^2) = x^4 - x^2(a^2 + 1) + a^2$$

Calcolato utilizzando Laplace sulla 1^a riga. Altre scelte sono possibili.

Note: non c'è una formula tipo-Sarrus per calcolare determinanti 4×4 con prodotti di diagonali. Non si può riordinare le righe di A ottenendo un'altra matrice B e poi calcolare $P_B(x) = \det(B - xI)$, perché $P_B(x) \neq P_A(x)$.

Ponendo $t = x^2$, si ottiene $P_A(x) = 0 \Leftrightarrow t^2 - (a^2 + 1)t + a^2 = 0$,
che ha soluzioni $t_1 = 1, t_2 = a^2$. Quindi le soluzioni

di $P_A(x) = 0$ sono date da $x = \pm\sqrt{t_1}, x = \pm\sqrt{t_2}$, cioè

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = a, x_4 = -a.$$

Queste sono sempre distinte⁵ a meno che $a \in \{-1, 0, 1\}$.
Quindi se $a \notin \{-1, 0, 1\}$ la matrice è diagonalizzabile perché ha 4 autovalori reali distinti.

Se $\boxed{a=0}$, la matrice ha autovalori ± 1 con $m_a(\pm 1)=1$ e un autovalore 0 con $m_a(0)=2$.

$\alpha M_g(\pm 1) \leq m_a(\pm 1)$, quindi $m_g(\pm 1)$ vale 1. Dobbiamo controllare quanto vale $m_g(0)$.

$$\dim \ker A - 0 \cdot I = \dim \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{elim. Gauss}}{=} \dim \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

$m_g(0) < m_a(0)$, quindi per $a=0$ la matrice non è diagonalizzabile.

Se $\boxed{a=\pm 1}$, la matrice ha autovalori ± 1 con $m_a(1)=m_a(-1)=2$. Dobbiamo controllare $m_g(1)$, $m_g(-1)$.

$$\dim \ker A - 1 \cdot I = \dim \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{elim. Gauss}}{=} \dim \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$m_g(1) < m_a(1)$, quindi per $a=\pm 1$ la matrice non è diagonalizzabile.

Risposta finale: A è diagonalizzabile se e solo se $a \in \{-1, 0, 1\}$

Note: se A ha dimensione 4, $p_A(x)$ ha sempre grado 4 e ci sono 4 autovalori contati con molteplicità algebrica. Qualunque altro risultato deve essere sbagliato

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 4.

Si consideri l'applicazione lineare

$$\Phi : Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

tale che, per ogni $A \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ valga $\Phi(A) = AB$, dove B è la seguente matrice fissata:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Determinare la dimensione di $Ker \Phi$ e descriverne una base.
- Determinare la dimensione di $Im \Phi$ e descriverne una base.

Prendiamo $w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

come base di $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Φ è un'applicazione lineare da $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, a cui è associata una matrice 4×4 .

$$\Phi(w_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = w_1 + 2w_2$$

$$\Phi(w_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2w_1 + 4w_2$$

$$\Phi(w_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = w_3 + 2w_4$$

7

$$\Phi(w_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2w_3 + 4w_4$$

La matrice associata a Φ nella base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è

$$C = \begin{matrix} & \phi w_1 & \phi w_2 & \phi w_3 & \phi w_4 \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elim. Gauss:

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Im } C = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{Ker } C = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Quindi

$$\text{Im } \phi = \text{span}(w_1 + 2w_2, w_3 + 2w_4) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{Ker } \phi = \text{span}(w_2 - 2w_1, w_4 - 2w_3) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$\dim \text{Im } \phi = \dim \text{Ker } \phi = 2.$$